第一章 狭义相对论

本部分重要概念汇总：

经典力学的相对性原理，伽利略变换，绝对时空观

迈克尔逊莫雷实验，狭义相对论两个基本假设，狭义相对论的几个经典推论：同时的相对性，时间延缓，尺缩效应

洛伦兹正反变换，狭义相对论质速关系、动量、动力学基本方程、质能关系

第一节：经典力学的相对性原理、伽利略变换不变性与绝对时空观

一．经典力学的相对性原理

1. 力学是研究物体的运动，即物体位置随时间的变化关系。

2. 要最先选择参考系建立坐标系，描述物体的运动速度、加速度、力学定律才有意义（亦即若无参考系，则描述无意义），根据实际情况需要来选择参考系

3. 力学相对性原理或牛顿相对性原理：

对于任何惯性参考系(牛顿运动定律在其中有效的参考系)，物体运动所遵循的力学规律是相同的，具有相同的数学表达形式。即，对于描述力学现象的规律在所有惯性系是等价的。

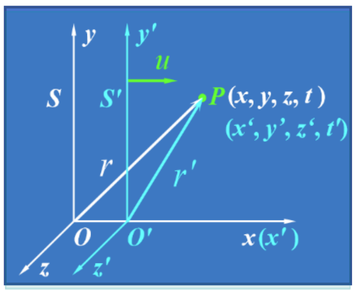
该原理的描述对象为力学规律，而对光电热学则不一定成立。

二．伽利略变换

伽利略变换是针对牛顿定律在不同惯性系之间的变换。

伽利略变换式：由静止参考系 *S* 转换到运动参考系 *S’*。

正变换：



$x' = x - ut$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$

由定义可以推导出：

$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$

力学相对性原理与伽利略变换相协调：

要求力学定律在一切惯性系中数学形式相同，就要求，给出不同惯性系中对运动描述的关联。

伽利略变换保证了力学相对性原理。

牛顿运动定律具有伽利略变换的不变性

三．绝对时空观（牛顿）

时间于空间是绝对的,与物质的存在和运动无关。

1. 绝对空间

长度的绝对性：任意物体都可由无穷多套坐标系加以描述，而所有描述，相互之间完全等价。

长度测量的绝对性：在与长度方向平行的坐标轴上，物体两端坐标值之差。

2. 绝对时间

对不同惯性系，伽利略变换中我们默认了$t' = t$

同时的绝对性：在同一参照系中，两个事件同时发生；在其他惯性系中，两个事件也一定同时发生。

时间间隔的测量是绝对的：在同一地点发生的同一过程所经历的时间在不同参照系测量是一样的。

四．伽利略变换的困境

麦克斯韦方程组告诉我们，光在特定介质中的传播速率是不允许被篡改的，是一个常数。如果麦克斯韦的理论正确，那么无论选择何种参考系，电磁波在真空中的传播速率皆不会受到影响。

矛盾：

牛顿力学认为：电磁波的传播速率**随参考系的转换而变化**。

麦克斯韦认为：光速是不变的，**“绝对的”**。

第二节 狭义相对论的两个基本假设

一. 伽利略变换的困难

1. Maxwell 电磁场方程组不服从伽利略变换

2. 1887 年，**迈克尔逊—莫雷实验**:

结论:“以太”实验的零结果，说明“以太”根本不存在！不同的惯性系中，光在真空中的传播速率都是相同的

3. 理想实验：

在车上观察，A、B 两个信号接收器同时响应；

在地面上观察，A 先接收到信号，一定时间间隔后，B 才接收信号。

同一个实验，两组结果，一个事件既“同时”又“不同时，**有矛盾**

问题出在牛顿的“绝对时间”上。

二. 狭义相对论的两个基本假设（重点）

1. 光速不变原理 (principle of constancy of light velocity)

在所有的惯性系中，光在真空中的传播速率具有相同的值

$c = 299\ 792\ 458$ m/s

解读：

光速不随观察者的运动而变化

光速不随光源的运动而变化

2. 相对性原理（relativity principle）

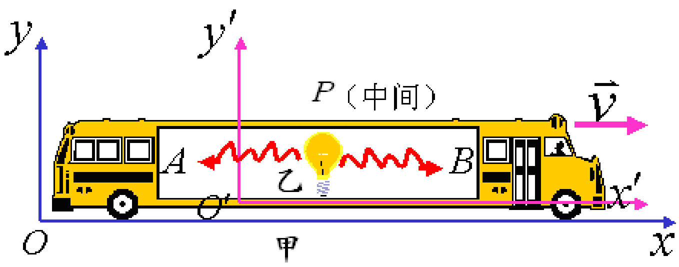
一切**物理规律**在所有惯性系中具有相同的形式，不存在特殊的、绝对的惯性系。

含义：

一切物理规律在所有惯性系中具有相同的形式，但是物理量在不同惯性系中的测量值是不同的。**联系被测物理量间的规律对任意的惯性系都是相同的。**

第三节 狭义相对论的时空观

一. 同时的相对性



结论：

沿两个惯性系**相对运动方向**上发生的两个事件，如果在其中一个惯性系中表现为同时的，那么在另一个惯性系中观察**一定不是同时的**，总是在前一个惯性系运动的**后方的那一事件先发生**。

1. 若两个事件在某一惯性系中为**同时异地**事件，则在其他惯性系中必定不是同时发生的，这就是**同时性的相对性**。

2. 在一个惯性系中**同时同地发生的事件**,在其它惯性系也**必同时同地发生**，因此同时性的相对性只是对两个同时事件发生在不同地点而言，**当两个同时事件发生于同一地点时，同时性是绝对的。**

二. 时间延缓

1. μ子简介：

μ 子质量为电子的 200 倍，半衰期为 2.2 微秒。

μ 子以接近光速的速率在宇宙中穿行。如果说 μ 子的平均寿命为 2.2 微秒，则平均能前进 660 米而已。那么在经过数个半衰期后，他们最多可以冲出 2000-3000 米。但事实是，科研人员在地球表面搜集观测到海量的 μ 子。

同一个 μ 子，高速运动与静止状态相比，其衰变被延缓了。

2.运动时钟变慢

详细推导略

$$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

其中 Δt 为**静止参考系**中观察到的同地两事件的时间间隔，而 $\Delta t'$为相对运动速度为 u 的参考系中两事件的时间间隔

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$=\gamma\tau_0 \qquad \beta=\mathrm{u/c}$$

洛伦兹因子：

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

结论：

（1）时间延缓效应显著与否取决于 γ，当 u 远小于光速 c 时

$$\gamma = 1\Big/\sqrt{1-\beta^2} \sim 1, \qquad \tau \approx \tau_0$$

，

（2）时间延缓效应：

在 S' 系中测得发生在同一地点的两个事件之间的时间间隔 $\Delta t'$，在 S 系中观测者看来，这两个事件为**异地事件，其间的时间间隔 Δt 总是比 $\Delta t'$ 要大**（洛伦兹因子总是大于 1 的）

（3）原时：

在某一惯性系中，如果**先后发生的两个事件在同一地点**，那么这两事件间的时间间隔就称为**原时**。

在不同惯性系中测量给定两事件之间的时间间隔，测得的结果以**原时最短**。（别的惯性系都不是同地发生，即相对于同时的惯性系由运动速度，从而时间更长。）

（4）时间延缓效应是相对的

对 S'来说，静止于 S 系中的时钟是运动的，因此相对于自己系中的时钟要走的慢些。

三. 空间收缩

1.运动物体的长度测量

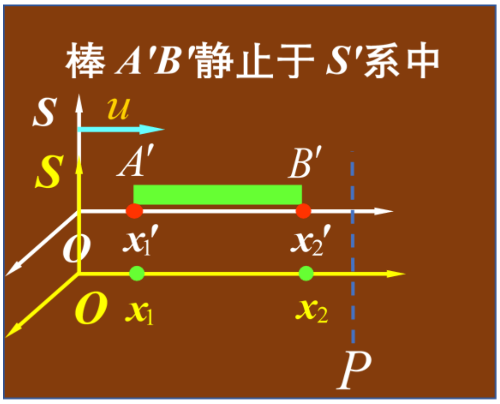
在 *S'*中测量不需要同时进行，$l_0 = x_2' - x_1'$，而在 S 中，

方法一：测量必须同时进行

方法二：棒长经过 S 系中某点的时间×棒的速度

原长：

相对于棒静止的惯性系所测得的棒的长度



2.长度收缩

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2} = l_0\big/\gamma$$

其中，l_0 为为原长度，而 l 为在 S 系中测得的长度。

结论：

（1）长度收缩效应显著与否决定于 γ 因子

当相对速度 u 远小于光速时，$\gamma \sim 1$, $l \approx l_0$。

（2）长度缩短效应：

沿尺长度方向相对尺运动的观测者测得的尺长 l ，较相对尺静止观测者测得的同一尺的原长 l_0 要短.

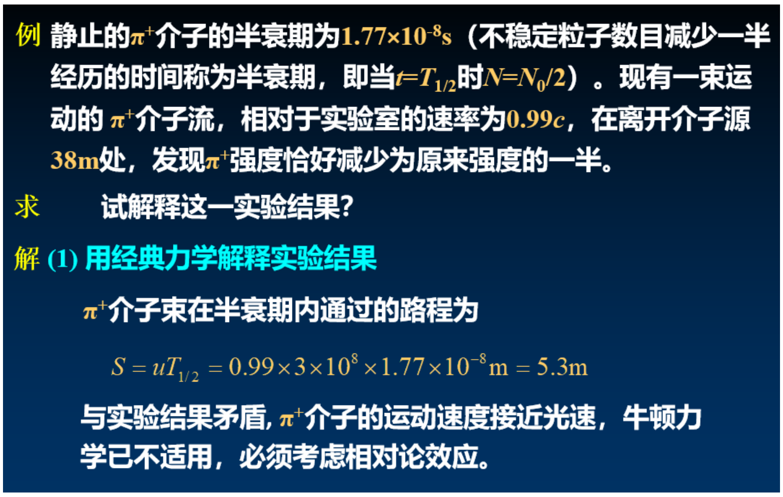
在不同惯性系中测量同一尺长，以**原长为最长**。

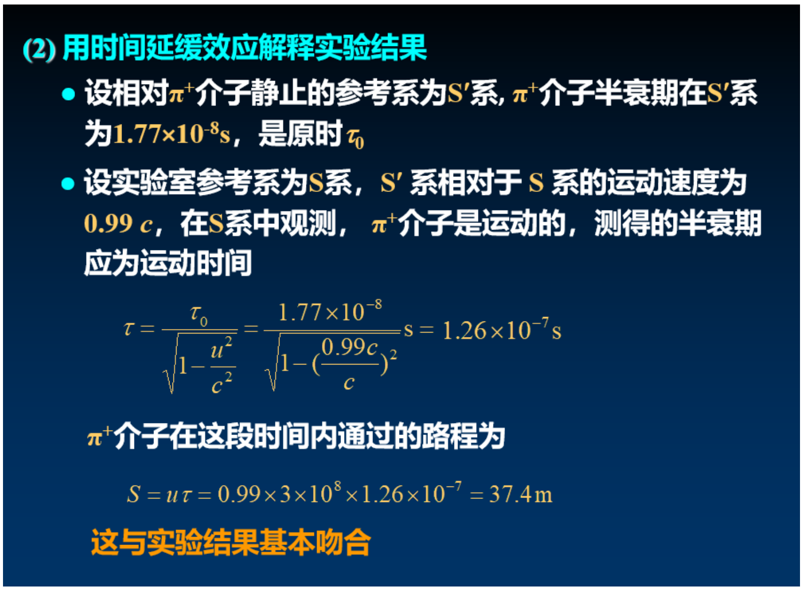
长度收缩效应是相对的

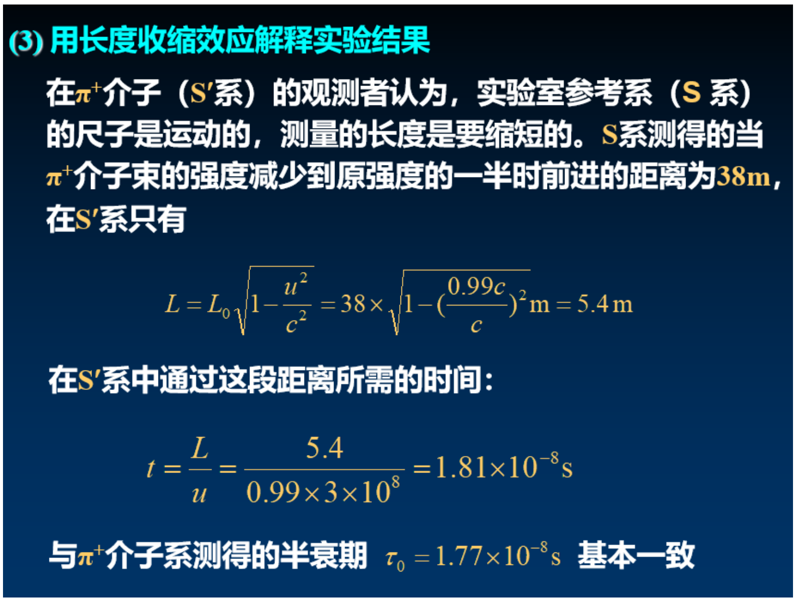
长度收缩效应是时间相对性的直接结果

长度收缩效应只发生在物体的运动方向上，垂直于运动方向的长度不收缩。

例题：







第四节 洛伦兹变换

一．洛伦兹变换

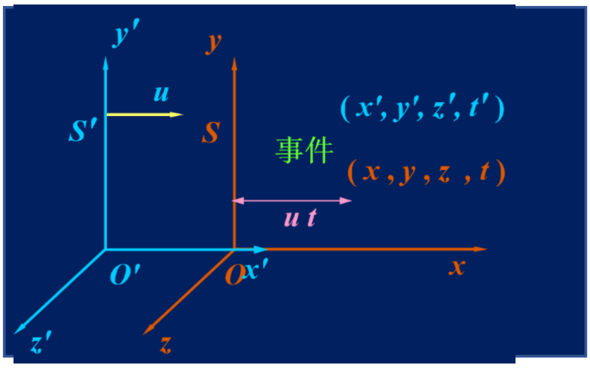
在 t＝t’＝0 时刻， S , S’ 原点重合：

$$
\begin{aligned}
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= b_1 x + b_2 t \\
x' &= a_1 x + a_2 t
\end{aligned}
$$

其中,$a_1 a_2 b_1 b_2$ 待定系数，推导过程省略

正变换：

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



逆变换：

$$x = \frac{x'+ut'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t'+ux'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

讨论：

（1）当 u 远小于 c 时，洛伦兹变换退化到伽利略变换

（2）光速时各种物体运动的一个极限速度，**任何物体的运动都不会超过光速**，因为 u>c，则会产生虚数。

（3）两事件在 S、S′ 系中的时间间隔、空间间隔的变换关系

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - x_1) - u(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

反映了**空间、时间并非相互独立**。

（4）洛伦兹速度变换：

$$\upsilon'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x - u\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t - \frac{u}{c^2}\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\upsilon_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}\upsilon_x}$$

$$\upsilon'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y\sqrt{1-\beta^2}}{\mathrm{d}t - \frac{u}{c^2}\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\upsilon_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2}\upsilon_x}$$

同理 $\upsilon'_z = \dfrac{\upsilon_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2}\upsilon_x}$

二．洛伦兹变换于狭义相对论时空观

（1）同时的相对性

在 S’系中的两个同时异地事件，即 $\Delta t' = 0,\ \Delta x' \neq 0$，在 S 系中 $\Delta t = \dfrac{\Delta t' + u\Delta x'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$（根据讨论 3 中的内容的逆变换）不是同时事件。

（2）时间延缓

在 S’系中同地不同时发生的两个事件，即 $\Delta x' = 0,\ \Delta t' = \tau_0 \neq 0$（由于是同地发生，此即原时），在 S 系中 $\tau = \Delta t = \dfrac{\Delta t' + u\Delta x'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$，$\tau_0 < \tau$，所以原时最短。

（3）长度收缩：

注意：测量运动物体的长度，应**同时**确定物体两端的位置。确定物体两端位置为两个事件。

若物体在 S 系中运动，同时测量 $\Delta t = 0,$ 得到长度 $\Delta x = l$；

物体在 S'系中静止，即使测量不同时 $\Delta t' \neq 0$, 测得静止长度 $\Delta x' = l_0$；

$\Delta x' = \dfrac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$， $l_0 = \dfrac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}$， 故静止长度最长。

闵可夫斯基时空与光锥

第五节　狭义相对论质点动力学简介

讨论狭义相对论质点动力学的原则：

（1）符合狭义相对性原理：金国洛伦兹变换保持定律形式不变

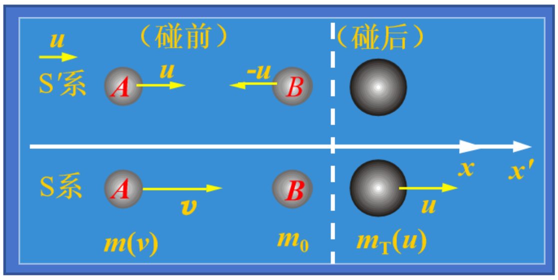
（2），满足对应原理：趋于低速时，物理量必须趋于经典理论中相应的量

一. 相对论质量、动量 质点动力学基本方程

1.质速关系：

问题的提出：

以两质点的完全非弹性碰撞为例，得出为了保证洛伦兹变换不变性，质量必须是与速度有关的量 $m = m(v)$。



公式的推导：

定义：m=m(v)；v =0 时，m_0=m(0),

静止质量：相对质点静止的惯性系所测得的质量。

根据洛伦兹变换，在 S 系中，碰撞前，

$$\upsilon_A = v = \frac{\upsilon'_A + u}{1+\upsilon'_A \dfrac{u}{c^2}} = \frac{u+u}{1+\dfrac{u^2}{c^2}} = \frac{2u}{1+\dfrac{u^2}{c^2}} \quad (1.1.1)，\ \upsilon_B = 0$$

碰撞后：设具有共同速度 u，则根据

质量守恒：$m(\upsilon) + m_0 = m_T(u)$

动量守恒　$m(\upsilon)\cdot\upsilon = m_T(u)\cdot u = [m(\upsilon)+m_0]\cdot u$，

其中 $m_T(u)$ 为碰撞后的总质量，

由此就可以得出 $m(\upsilon)=\dfrac{m_0 u}{\upsilon-u}=\dfrac{m_0}{\dfrac{\upsilon}{u}-1}$ （1.1.2），

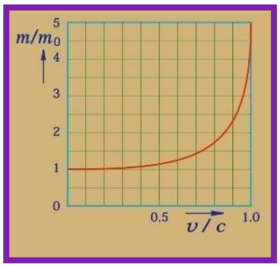
再根据（1.1.1）可以得到 $\dfrac{\upsilon}{u}+\dfrac{\upsilon^2}{c^2}\dfrac{u}{\upsilon}-2=0$，解方程可以得到 $\dfrac{\upsilon}{u}=1\pm\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}$，

取较大解，带入（1.1.2）得到

相对论质速关系 $m(v)=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$，其中 *m(v)* 为相对论质量，$m_0$ 为静止质量。

讨论：

（1）根据质速关系可以得出，质量为**相对概念**，物体质量相对惯性系来说才有意义



（2）当 $v << c$ 时，$\beta = v/c \longrightarrow 0,\ m = m_0$ 从而退回经典力学

（3）质速曲线

（4）光速是物体运动的极限速度，物体运动速度不能大于 c, 只有 m0=0 的物体才能以光速运动（光子）

2.相对论动量

$$\vec{p}=m\vec{\upsilon}=m_0\vec{\upsilon}/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$$

该公式保证动量守恒具有洛伦兹变换不变性

3. 相对论质点动力学基本方程

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}[m(v)\vec{\upsilon}]}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right)$$

讨论：

考虑 $F=\dfrac{v\mathrm{d}m+m\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，可以得到 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\vec{F}-\vec{\upsilon}\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}{m}=(\vec{F}-\vec{\upsilon}\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t})/\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$，

也就是说，当 v 趋于 c，$m\to\infty$，$\mathrm{d}\vec{\upsilon}/\mathrm{d}t\to 0$

结论：不可能将物体从静止加速到等于或大于光速的状态

二. 能量 质能关系

物体的动能是使物体从静止到运动过程中，合外力所做的功

依据此定义，推导：

$$\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}\vec{p}\cdot\vec{\upsilon}=\left(\vec{\upsilon}\mathrm{d}m+m\mathrm{d}\vec{\upsilon}\right)\cdot\vec{\upsilon}\quad(2.1.1)$$

考虑 $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$，两边做微分得到 $\mathrm{d}m=\frac{m}{c^2-\upsilon^2}\vec{\upsilon}\cdot\mathrm{d}\vec{\upsilon}$，即 $\mathrm{d}\vec{v}=\frac{c^2-v^2}{m\vec{v}}\mathrm{d}m$，带入(2.1.1)可以得到 $\mathrm{d}A=c^2\mathrm{d}m$ ※

做积分可以得到

$$E_K=\int_L\vec{F}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r}=\int_{m_0}^{m}c^2\mathrm{d}\,m=mc^2-m_0c^2$$ ※相对论质能方程

讨论：

（1）相对论动能与经典力学动能的区别和联系

若对 $\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$ 做**泰勒展开**可以得到，

$$E_k=c^2\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}-m_0\right)=m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{\upsilon^4}{c^4}+\cdots-1\right),$$

当 v 远小于 c 时，$E_k=m_0\upsilon^2/2$，高次项可以忽略，从而相对论动能退化为经典力学中的动能。

（2） 当 v 趋于 c，E_k 趋于∞ ，将一个静止质量不为零的粒子，使其速度达到光速是不可能的。

（3） $E_K=mc^2-m_0c^2$ 可以改写为 $mc^2=E_\mathrm{k}+m_0c^2$，

物体的总能量为 $E=mc^2$，这说明相对论质量是能量的量度，物体的相对论总能量与物体的总质量成正比质量与能量不可分割，物体质量与能量变化的关系 $\Delta E=(\Delta m)c^2$

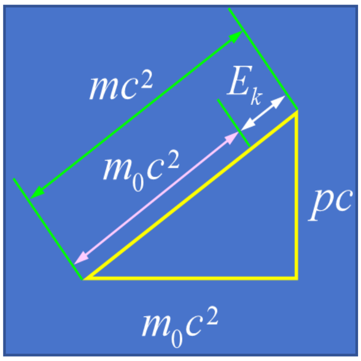
静止物体具有能量 $E_0=m_0c^2$，说明任何宏观静止物体具有能量

（4） 对于一个存在有内部结构和内部运动的系统来说

$E = E_k + M_0 c^2$

其中 E_k 为系统随质心平动的动能 M_0c^2 为系统的内能

三. 相对论能量和动量的关系



由 $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ 推知 $m^2c^4 = m^2v^2c^2 + m_0^2c^4$， 即

$E^2 = p^2c^2 + E_0^2$

例：求光子的动量与相对论质量

光子：$m_0=0$ 从而 E=pc ,E=hv

推得 $p = \dfrac{h\nu}{c} = \dfrac{h}{\lambda}$， $m = \dfrac{E}{c^2} = \dfrac{h\nu}{c^2}$

第二章 广义相对论

第一节 超越狭义相对论的思考

狭义相对论两个无法解决的问题

1. 引力问题
2. 非惯性系问题

目标：

实现非惯性系与惯性系的平权。

改造引力理论 (建立时空与物质的关联) 。

第二节 广义相对性原理和等效原理

一. 广义相对性原理

在任何参考系中(包括非惯系）所有的物理规律都是相同的，称为广义相对性原理。

二. 等效原理

1. 平动惯性力：

物体以加速度 a 相对于惯性系 S 平动的非惯性系 S'，为了利用牛顿定律解决问题，设想其中所有物体都受一**虚拟力**(惯性力)的作用。

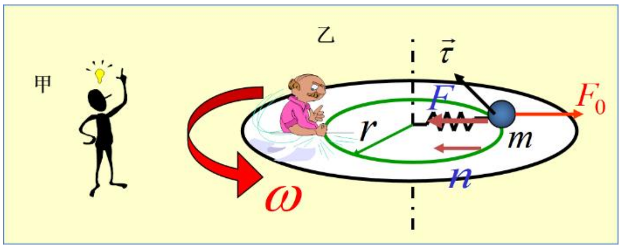
大小：物体质量与非惯性系对惯性系的加速度的乘积

方向：与非惯性系对惯性系的**加速度方向相反**。

性质：**不是真实的力**，无施力物体，无反作用力，**是非惯性系加速度的反映**。

作用：引入惯性力后，在非惯性系中，牛顿第二定律形式上成立。

$\vec{F}_{惯} = \vec{F}_0 = -m\vec{a}_0$



2. 转动参考系

从甲乙两人视角分别考虑：

对甲：小球受弹力 $\vec{F} = m\omega^2 r\vec{n}$ 作圆周运动

对乙：m 受到弹性力 $\vec{F} = m\omega^2 r\vec{n}$ 的作用却不运动

圆盘为非惯性系，m 除受到弹性力作用外，还受到一与圆盘向心加速度方向

相反的惯性力的作用，即**惯性离心力** $\vec{F}_0 = -m\omega^2 r\vec{n}$ 。

注意区分：向心力，离心力，惯性离心力。

3. 惯性质量与引力质量相等

在万有引力定律 $\vec{f}(r) = -G\dfrac{Mm}{r^2}\hat{r}$ 中， m 反映物体产生和接受引力的性质，称为引力质量

在牛二 $\vec{f}(r) = m'\vec{a}(r)$ 中，m'中物体惯性的大小，称为惯性质量。

一系列实验证明，引力质量与惯性质量相同。

4. 等效原理

思想实验一：

①自由空间加速火箭。

②引力场中静止的火箭。

现象：小球在无引力场的加速参考系和有引力场的惯性系中的运动规律相同，**无法区分**。

结论：惯性力和引力等效；

惯性力场与同方向引力场等效。

思想实验二：

①引力场中某一时空点自由下落的升降机

②无引力场的自由空间匀速运动的升降机

现象：小球在无引力场的惯性系和有引力场的加速参考系中的运动**规律相同，无法区分**。

结论：惯性力和引力等效；惯性力场抵消反方向引力场。

5. 局部参考系

局部惯性系：在小体积内，**引力场可视为均匀**，从而可通过参考系的加速运动消除其中各点的引力影响。**这种在局部空间范围消去了引力场的参考系称为局部惯性系。**

经典惯性系	局部惯性系
自身无加速度	自身有加速度，但惯性力消除了引力影响
理想模型	能够实际操作，在局部范围内实现

等效原理：对于一切物理过程，引力场与匀加速运动的参考系局部等效，即引力与惯性力局部等效。

第三节 广义相对论的几个结论

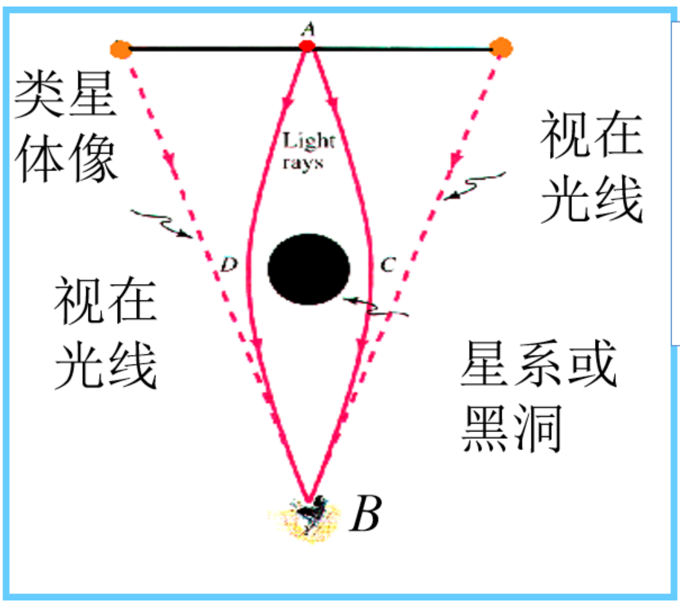
一. 引力作用下光的弯曲

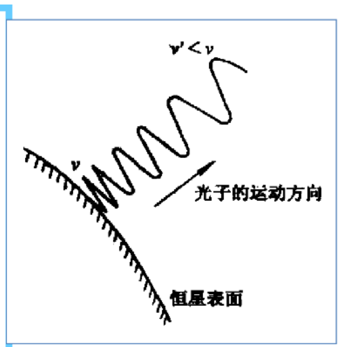
物体的引力能使光线弯曲

由于太阳引力场的作用，有可能观测到太阳后面的恒星，最好的观测时间发生日全食的时候。**1919** 年**英国天文学家爱丁顿**和**戴森**分别前往西非和巴西，观测到当年 5 月 29 日发生的日全食，发现了光的偏折

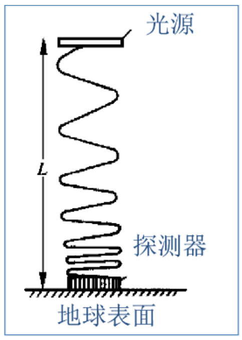
引力透镜效应：星球的强引力场能使背后传来的光线汇聚。

1998 年 3 月英国用“默林”射电望远镜和哈勃太空望远镜观测到完整的引力透镜成象“爱因斯坦环”





红移



蓝移

宇宙中很可能存在黑洞，它不辐射电磁波，因此无法直接观测，但是它的巨大质量和极小的体积使其附近产生极强的引力场，**引力透镜是探索黑洞的途径之一**。

二. 引力与时间：时间延缓与引力频移

1. 例子：高速旋转的圆盘

盘上存在引力场，方向由盘心指向边缘，靠近边缘的位置引力势较低，得出：引力势较低的位置，时间进程比较慢。

结论：引力势较低的位置，时间进程比较慢，反之亦然。

2. 引力频移：

光沿引力场方向传播 —— 接收到的光频率蓝移

光逆引力场方向传播 —— 接收到的光频率红移

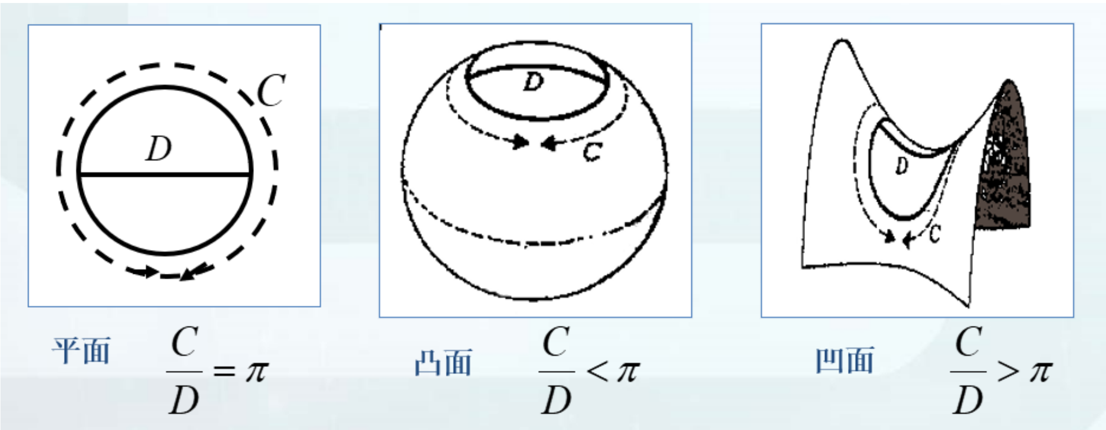
3. 引力红移

宇宙中有一类恒星，体积很小，质量却很大，叫做矮星，引力势比地球低的多，矮星表面的时间进程比较慢，那里的发光的频率比同种的原子在地球上发光频率低，看起来偏红，这个现象叫做**引力红移**。

三. 引力与空间 时间弯曲与水星进动

引力场的存在使得空间不同位置的杆的长度出现了差别。**引力势较低的位置，杆的长度越短。**

判断空间是否弯曲的方法：测圆周长与直径的比



水星进动：

1859 年发现水星轨道不是固定的椭圆，其近日点旋进（进动），牛顿引力理论无法解释，可用广义相对论时空弯曲理论解释。

四. 引力波：LIGO